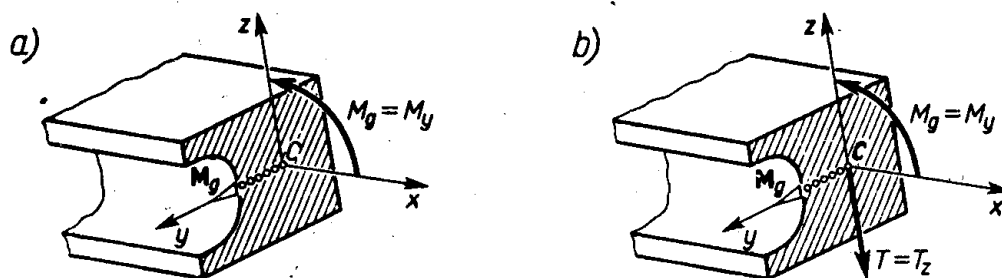


5 ZGINANIE PROSTE

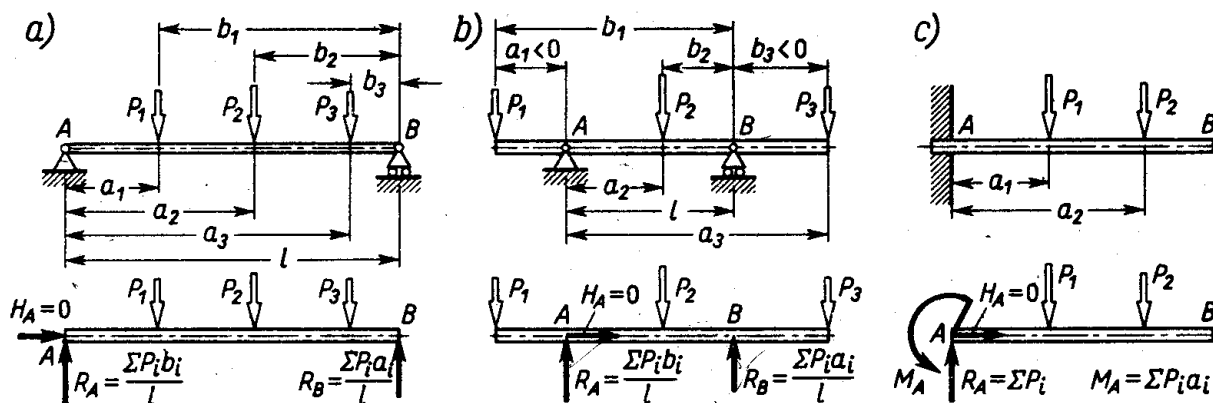
5.1. Uwagi wstępne

Ostatnim z trzech prostych przypadków pracy pręta jest *czyste zginanie*. Zachodzi ono, gdy w myślowym przekroju pręta istnieje tylko moment zginający M_g (rys. 5.1a), którego wektor jest prostopadły do osi pręta, czyli leży w płaszczyźnie przekroju. Równolegle istnieje przypadek *zginania poprzecznego*, gdy wysiłek przekroju tworzą moment M_g i siła poprzeczna T prostopadła do osi pręta, czyli leżąca w płaszczyźnie przekroju (rys. 5.1b).



Rys. 5.1. Przypadek czystego zginania (a) i zginania poprzecznego (b)

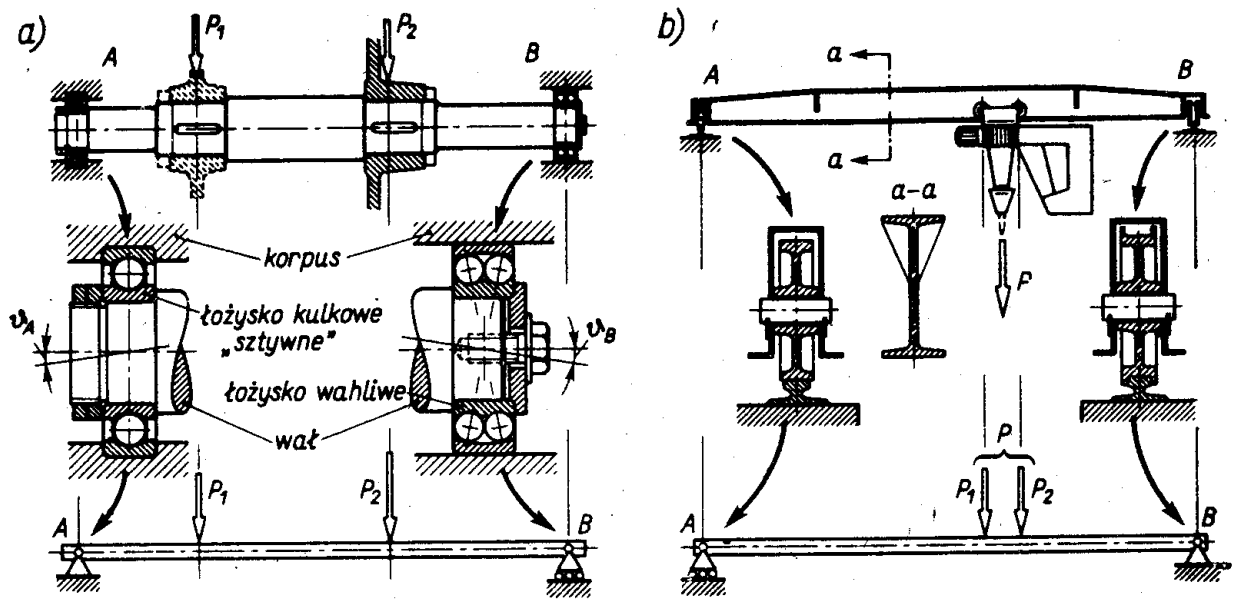
Ten drugi przypadek, chociaż należy do tzw. *wytrzymałości złożonej*, ma wiele wspólnego z pierwszym. Z tego powodu obydwie te przypadki zbadamy pod wspólnym mianem zginania, zaznaczając, gdzie to potrzeba, zachodzące między nimi różnice.



Rys. 5.2. Podstawowe postaci belki statycznie wyznaczalnej

a) dwupodporowa; b) dwupodporowa z wysięgnikami; c) wspornikowa.

Zginanie występuje, gdy obciążenie pręta, zwanego odtąd *belką*, stanowi układ sił przecinających jego oś i do tej osi prostopadłych (rys. 5.2a). Zakładamy na razie, że układ ten jest *plaski*. Składa się on z sił czynnych P_1, P_2, \dots i sił biernych (reakcji), tj. R i H . Te ostatnie określone są z trzech równań równowagi płaskiego układu sił, wobec czego mogą być tylko trzy niewiadome reakcje, a pojedyncza belka może mieć tylko jedną z trzech postaci (rys. 5.2). Wyznaczenie reakcji, stanowiące pierwszy i niezbędny na ogół etap analizy, jest znane z mechaniki ogólnej i dlatego będzie ono zaznaczone tylko w formie skróconej.



Rys. 5.3. Przykłady tworzenia schematu obliczeniowego

Każdy z modeli (rys. 5.2) stanowi pewien schemat obliczeniowy i może odpowiadać różnym konstrukcjom, jak na rys. 5.3, gdzie ten sam schemat obejmuje i wał maszyny na łożyskach tocznych i belkę suwnicy opartą na kołach jezdnych.

Łożysko wahliwe B (rys. 5.3a) ma bieżnię pierścienia zewnętrznego w postaci odcinka kuli, co daje swobodę obrotu (w płaszczyźnie rysunku) o dość spory kąt ϑ_B (rzędu $3 \div 5^\circ$). Ponadto w tym rozwiązaniu pierścień zewnętrzny ma możliwość, o ile pominąć tarcie, przesuwu poosiowego. Z tych powodów modelem łożyska B jako zespołu jest podpora przegubowa przesuwna. W łożysku A swoboda obrotu w płaszczyźnie rysunku wynika tylko z pewnych luzów i jest znacznie mniejsza ($\vartheta_{\max} \approx 0,1^\circ$). Gdy kąt ϑ_A spowodowany odkształceniem belki jest mniejszy⁽¹⁾ od ϑ_{\max} , to modelem łożyska A , jako zespołu, jest podpora przegubowa nieprzesuwna, gdyż pierścień zewnętrzny łożyska nie ma swobody przesunięcia wzdłużnego.

Podobnie schematyzujemy podpory suwnicy (rys. 5.3b). Koło toczne A nie ma obrzeży i sprowadza się do modelu podpory przegubowej przesuwnej (przy pominięciu tarcia). Koło toczne B mające obrzeża sprowadza się do modelu podpory przegubowej nieprzesuwnej.

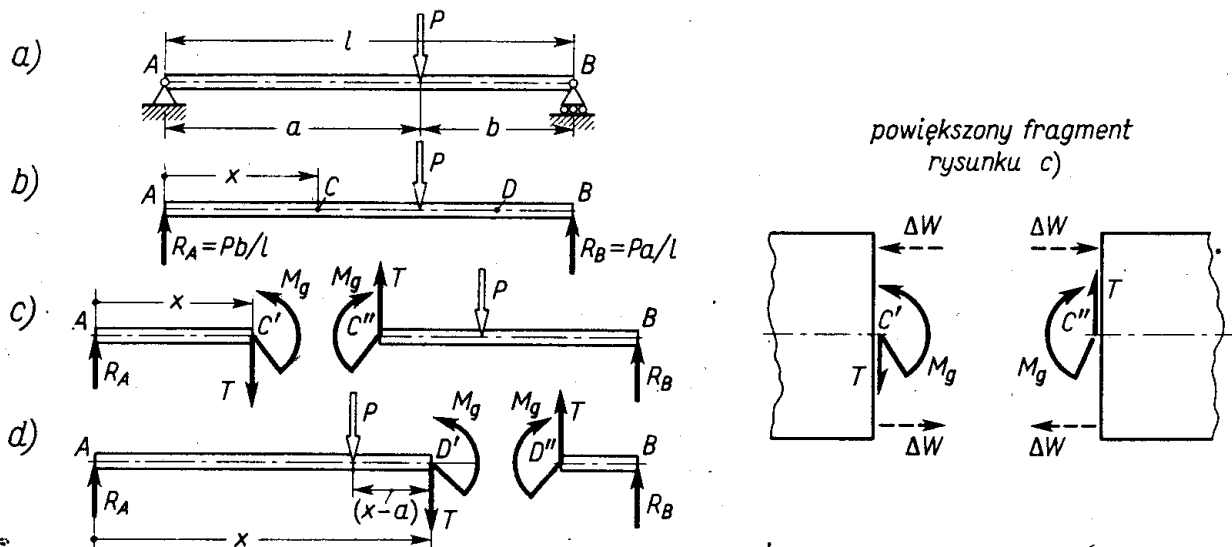
⁽¹⁾ Sprawdzenie tego jest konieczne. Jeśli bowiem $\vartheta_A > \vartheta_{\max}$, to łożysko takie ulega szybkiemu zużyciu.

5.2. Analityczne określenie momentów gnących i sił tnących

Podobnie jak w przypadku rozciągania lub skręcania, tak i przy zginaniu rozpoczniemy od określenia wysiłku przekrojów belki. Weźmy dla przykładu belkę obciążoną siłą czynną P (rys. 5.4a). Po wyznaczeniu reakcji

$$R_A = Pb/l, \quad R_B = Pa/l, \quad (a)$$

mamy pełny obraz obciążenia (rys. 5.4b). Dla ujawnienia wysiłku pewnego przekroju C , rozcinamy w nim myślowo belkę na dwie części. Aby przywrócić pierwotną równowagę



Rys. 5.4. Określenie momentu gnącego i siły tnącej

każdej z części, wprowadzamy w nowo powstałych przekrojach C' i C'' wysiłek o składowych w postaci siły tnącej T i momentu gnącego M_g (rys. 5.4c). Składowe te działające na jedną część są odpowiednio przeciwne do działających na część drugą. Ich wartość wyznaczamy z równań równowagi sformułowanych dla jednej części, obojętne której. Wiadomo bowiem, że wartości te nie zależą od tego, czy badamy równowagę jednej, czy drugiej części.

Po tym przypomnieniu ogólnej metody z art. 1.4, obliczmy wartość T i M_g dla części AC' . Równania równowagi: rzutów na oś pionową i momentów względem punktu C' są

$$R_A - T = 0, \quad R_A x - M_g = 0,$$

skąd po uwzględnieniu (a) mamy wartości

$$T = R_A = Pb/l, \quad M_g = R_A x = Pbx/l \quad (b)$$

i ponieważ są one dodatnie, zatem zwroty T i M_g są jak na rys. 5.4c. Wzory (b) są słuszne, gdy $0 < x < a$. Jeśli bowiem badać wysiłek przekroju D ($a < x < l$), to obraz sił działających na część badaną AD' jest inny (rys. 5.4d). Formułując podobne równania równowagi, mamy z nich

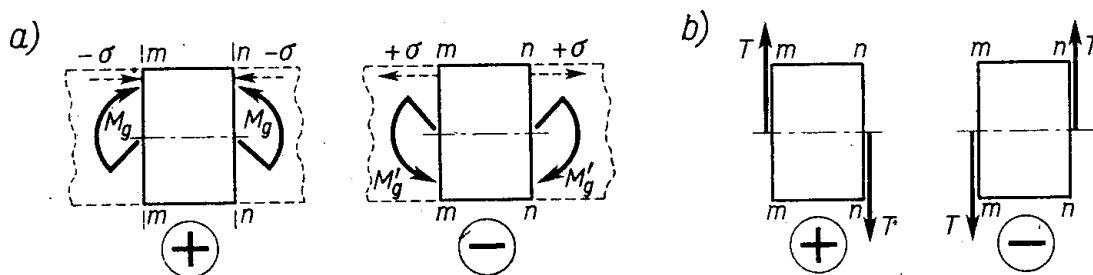
$$T = R_A - P, \quad M_g = R_A x - P(x - a), \quad (c)$$

lub po uwzględnieniu (a) oraz tego, że $a+b=l$,

$$T = -\frac{Pa}{l} = -R_B, \quad M_g = \frac{Pbx}{l} - P(x-a) = R_B(l-x). \quad (d)$$

Ujemna wartość siły T oznacza, że jej zwrot jest przeciwny do założonego. Dodatnia wartość M_g mówi, że M_g ma zwrot zgodny z założonym. Ponadto wzory (d) ilustrują dowolność wyboru jednej lub drugiej części do obliczenia T i M_g . Takie same bowiem wyniki otrzymamy badając równowagę części $D'B$ belki, zakładając oczywiście przeciwne niż dla części AD' zwroty T i M_g .

Dla porozumiewania się celowe jest wprowadzenie umowy o znaku momentu gnącego i siły tnącej. Przypomnijmy, że moment M_g jest wypadkowy z momentów elementarnych sił ΔW (rys. 5.4c). Jest rzeczą jasną, że przy podanych zwrotach M_g w częściach przekrojów C' i C'' leżących powyżej osi dominują siły ΔW , a więc i naprężenia, ściskające a w dolnej części — rozciągające. Umawiamy się, że takie właśnie momenty gnące są dodatnie. Jeśli z belki wyciąć element, to dodatnie i ujemne momenty są według powyższego kryterium naprężeń⁽¹⁾ takie jak na rys. 5.5a. Znak siły tnącej ustalimy według kryterium,



Rys. 5.5. Definicja znaków M_g i T

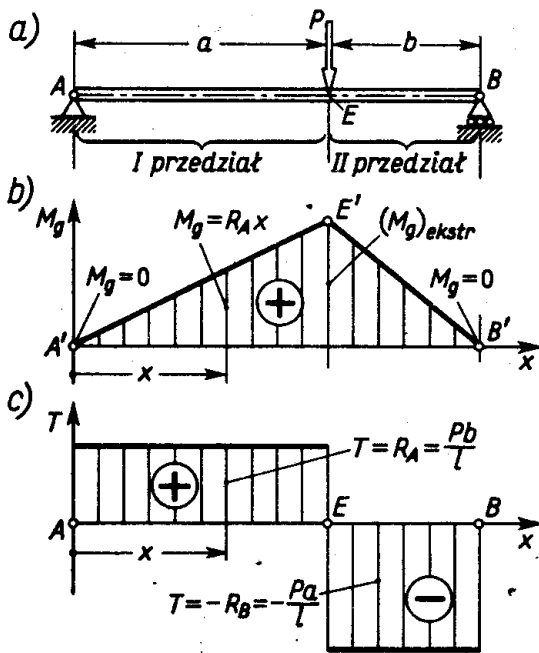
jakie użyto dla naprężeń stycznych (rys. 2.14c). Mianowicie, siłę tnącą uważamy za dodatnią, gdy usiłuje ona nadać rozpatrywanej części obrót *współzegarowy*. Tak więc obie siły T z rys. 5.4c są dodatnie, gdyż kryterium to jest spełnione. Dla wyciętego myślowo elementu przyjęte kryterium daje obraz sił T według rys. 5.5b.

Powyższe umowy są potrzebne przy przedstawieniu przebiegu $T(x)$ i $M_g(x)$ w formie wykresu sił tnących i wykresu momentów gnących. Sposób ich budowy jest identyczny jak w przypadku rozciągania lub skręcania. Oś odciętych jest równoległa do osi belki, sama odcięta x określa położenie badanego przekroju, a rzędne dają wartości T lub M_g w tym przekroju. I tak w badanej tu belce (rys. 5.4) zależności $M_g(x)$ są liniowe w obydwóch przedziałach i do zbudowania wykresu $M_g(x)$ wystarcza znajomość rzędnych dla dwóch wybranych wartości x . Biorąc w pierwszym przedziale $x=0$ i $x=a$ mamy z wzoru (b) odpowiednio $M_g=0$ i $M_g=Pab/l$. Z konfrontacji rys. 5.4 i 5.5 wynika, że ta druga wartość M_g jest dodatnia. Podobnie w drugim przedziale dla $x=a$ i $x=l$, mamy z wzoru (d) odpowiednio dodatnią wartość $M_g=Pab/l$ i $M_g=0$.

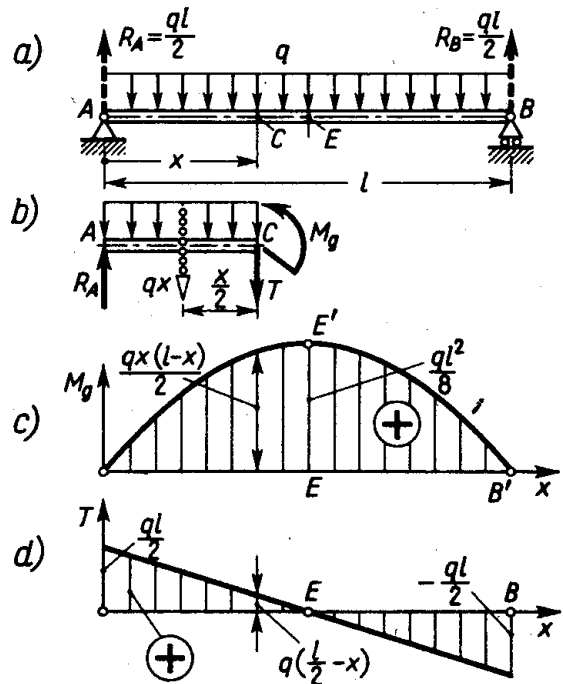
⁽¹⁾ Aby ułatwić zrozumienie, wróćmy do rys. 1.14b. Obie siły N_a i N_b są tam dodatnie, albowiem są wypadkowymi dodatnich σ . W przypadku momentu gnącego na jednej części przekroju naprężenia są ściskające, na drugiej — rozciągające. Do ustalenia znaku momentu potrzeba więc dodatkowo powiedzieć, na której części przekroju działają dodatnie, a na której ujemne naprężenia.

Jeśli dodatkowo rzędne wykresu M_g odmierzać powyżej, a ujemne poniżej osi odciętych, to z rys. 5.5 widać, iż rzędne te znajdują się zawsze po tej stronie, po której występują naprężenia ściskające. Ujmując to skrótowo, mówimy: „wykres M_g rysujemy po ściskanej stronie belki”. Zgodnie z tą umową otrzymujemy więc wykres $M_g(x)$ (rys. 5.6) jako łamaną linię $A'E'B'$. Ekstremalny moment gnący występuje w przekroju E , jest dodatni, a jego wartość

$$(M_g)_{\text{ekstr}} = Pab/l. \quad (e)$$



Rys. 5.6. Wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$ dla belki z rys. 5.4



Rys. 5.7. Wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$ belki obciążonej w sposób ciągły

Wykres sił tnących (rys. 5.6c) jest jeszcze prostszy, albowiem na odcinkach AE i EB wartość T jest stała. Uwzględniając umowę o znaku siły tnącej (rys. 5.5) mamy na odcinku AE siłę T dodatnią, a na odcinku EB ujemną. Przeskok wykresu w punkcie E jest

$$(Pb/l) - (-Pa/l) = P(a+b)/l = P.$$

Jako drugi przykład zbadajmy belkę, na którą działa równomierne obciążenie q (rys. 5.7a). Po wyznaczeniu reakcji⁽¹⁾

$$R_A = R_B = ql/2$$

odcinamy myślowo część AC belki nanosząc przy tym (rys. 5.7b) działające na nią siły: reakcję R_A , składowe wysiłku T i M_g oraz obciążenie ciągłe q na długości $AC = x$. Działanie tego ostatniego obciążenia jest, według praw statyki, równoważne działaniu wypadkowej qx przyłożonej w odległości $x/2$ od przekroju C . Z równania równowagi rzutów na

⁽¹⁾ Reakcje te narysowano umownie na rysunku samej belki nie usuwając podpór, jak na rys. 5.4b. Ścisłe biorąc, sposób taki nie jest prawidłowy, jest jednak stosowany, gdyż redukuje liczbę rysunków.

prostopadłą do osi belki mamy

$$T = R_A - qx = q[(l/2) - x], \quad (f)$$

a z równania równowagi momentów względem punktu C

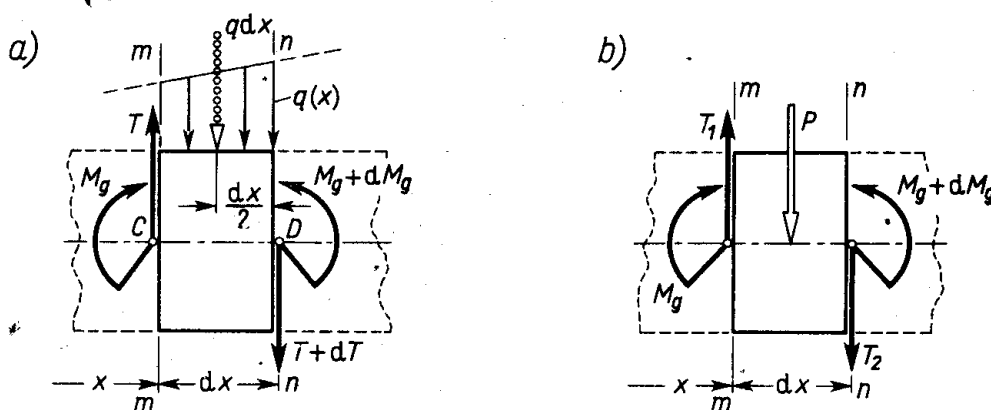
$$M_g = R_A x - (qx)(x/2) = qx(l-x)/2, \quad (g)$$

przy czym zależności te słuszne są na całej długości belki. Dodatnie wartości T i M_g wskazują, że ich zwroty są zgodne z danymi na rysunku. Widzimy, że taka siła T daje współzegarowy obrót części AC , a taki moment daje ściskanie części przekroju powyżej osi. Obie te wielkości są więc dodatnie w sensie umowy przyjętej na rys. 5.5.

Wykorzystując zależności (f) i (g) zbudujemy teraz wykresy $M_g(x)$ i $T(x)$. Z wzoru (g) wynika, że wykres $M_g(x)$ jest parabolą zwróconą wierzchołkiem do góry, przecinającą oś x w punktach $x = 0$ i $x = l$, odpowiadających podporom A i B (rys. 5.7c). Ekstremalna wartość M_g

$$(M_g)_{\text{ekstr}} = ql^2/8 \quad (h)$$

występuje w przekroju E ($x = l/2$). Wykres $T(x)$ jest zgodnie z wzorem (f) odcinkiem prostej (rys. 5.7d), której rzędne w przekrojach A i B są odpowiednio $(ql/2)$ i $(-ql/2)$. Zerowa siła tnąca jest w przekroju E ($x = l/2$), a więc tam, gdzie $M_g = (M_g)_{\text{ekstr}}$.



Rys. 5.8. Analiza równowagi elementów belki

Ta ostatnia uwaga jest przejawem ogólnej zależności między M_g i T . Zbadajmy mianowicie równowagę wyciętego myślowo elementu CD belki (rys. 5.8), na który działają:

- zewnętrzne obciążenie ciągłe q o wypadkowej $q dx$,
- siły wewnętrzne w przekroju $m-m$ o wypadkowej T i momencie M_g stanowiącymi wysiłek tego przekroju,
- siły wewnętrzne w przekroju $n-n$ o nieco zwiększonej wypadkowej $T+dT$ i nieco zwiększonym momencie M_g+dM_g będącymi wysiłkiem tego przekroju, a więc odpowiadającymi wartości $x+dx$ innej niż wartość x dla przekroju $m-m$.

Z warunku, że suma rzutów sił na prostopadłą do osi belki jest równa zero, otrzymujemy równanie

$$T - q dx - (T + dT) = 0,$$

skąd po przekształceniach mamy zależność

$$\frac{dT}{dx} = -q, \quad (5.1)$$

wiążącą pochodną siły tnącej z *lokalną*, tj. odpowiadającą danej współrzędnej x , wartością ciągłego obciążenia $q(x)$.

Formułując podobnie warunek równowagi momentów względem punktu D otrzymujemy równanie

$$M_g + T dx - (q dx)(dx/2) - (M_g + dM_g) = 0.$$

Jeśli $dx \rightarrow 0$, to w równaniu powyższym możemy pominąć małą wyższego rzędu, tj. $q dx^2/2$, i w rezultacie mamy

$$\frac{dM_g}{dx} = T, \quad (5.2)$$

jako zależność wiążącą pochodną momentu gnącego z lokalną wartością siły tnącej $T(x)$. Różniczkując na koniec stronami równanie (5.2) mamy przy uwzględnieniu (5.1)

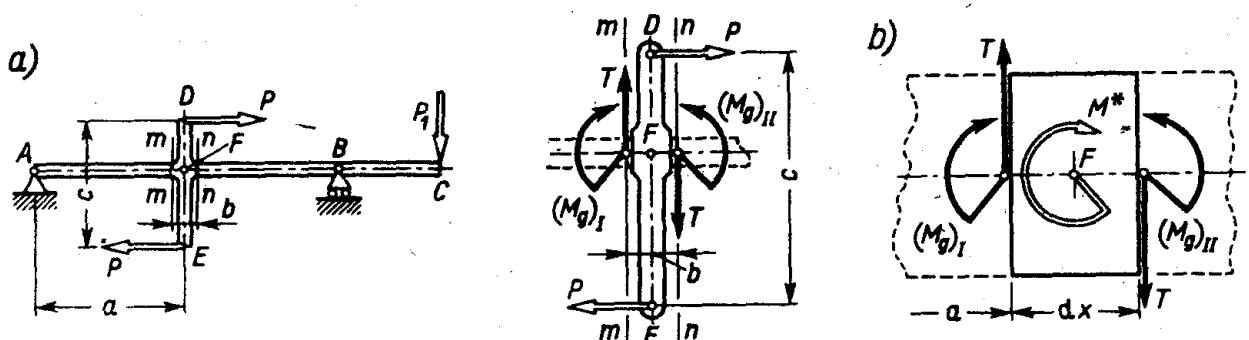
$$\frac{d^2 M_g}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q, \quad (5.3)$$

wiążące bezpośrednio moment gnący z lokalną wartością $q(x)$.

Z zależności (5.1)–(5.3) wynikają pewne reguły o przebiegu momentów gnących i sił tnących. Jeśli belka jest obciążona, jak na rys. 5.7, to $q(x) = q = \text{const}$ i z (5.1) mamy, że $T(x)$ musi być liniową funkcją x . Podobnie z (5.3) wynika, że $M_g(x)$ musi być kwadratową funkcją x . Obydwa te fakty znajdują potwierdzenie w zależnościach (f) i (g). Dla belek obciążonych siłami skupionymi (rys. 5.2) mamy na odcinkach między kolejnymi siłami $q(x) \equiv 0$. Wobec tego na poszczególnym odcinku $T(x) = \text{const}$, a M_g jest liniową funkcją zmiennej x . W miejscu przyłożenia siły skupionej (rys. 5.8b) siła tnąca doznaje przeskoku

$$T = T_2 - T_1 = -P,$$

czyli równo sile skupionej. Temu przeskokowi T odpowiada raptowna zmiana dM_g/dx , czyli załom funkcji $M_g(x)$. Obydwa te fakty obserwujemy w przekroju E (rys. 5.6).



Rys. 5.9. Wprowadzenie pojęcia momentu skupionego

Inną osobliwością są w przebiegu $M_g(x)$ miejsca przyłożenia skupionych momentów. Gdy do badanej belki AC przymocowana jest belka DE obciążona parą sił P o momencie $M^* = Pc$ (rys. 5.9a), wówczas z równowagi momentów elementu belki wyciętego prze-

krojami $m-m$ i $n-n$ wynika

$$(M_g)_I + Pc - (M_g)_{II} + Tb = 0. \quad (i)$$

Gdy wymiar $b \rightarrow 0$, z równania (i) mamy

$$(M_g)_{II} - (M_g)_I = Pc = M^*,$$

co wskazuje na przeskok wartości M_g między dwoma przekrojami teoretycznie nieskończenie bliskimi. Taki wyidealizowany przypadek zaznaczymy, jak na rys. 5.9b, gdzie M^* jest dla badanej belki AC zewnętrznym momentem przyłożonym w punkcie F i przedstawiającym działanie odrzuconej myślowo belki DE . W miejscu przyłożenia skupionego momentu siła tnąca nie zmienia się, co widać z tegoż rys. 5.9b.

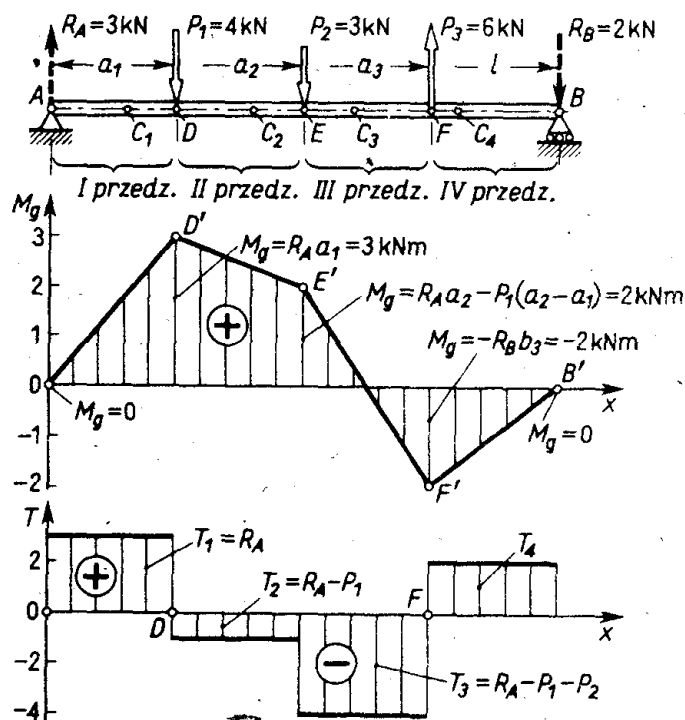
Zadania

1. Wykonać wykresy $M_g(x)$ dla belki (rys. 5.10) przyjmując $a_1 = 1$ m, $a_2 = 2$ m, $a_3 = 3$ m, $l = 4$ m.

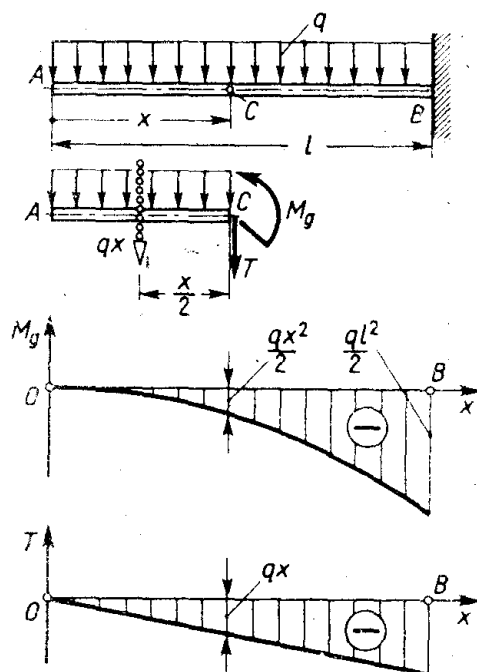
Odp. W porównaniu z przykładem (rys. 5.4) zadanie różni się liczbą przedziałów (4 przedziały), dla których należy sformułować odrębne równania równowagi. Na przykład dla przedziału II (gdy $a_1 < x < a_2$)

$$T = R_A - P_1, \quad M_g = R_A x - P_1(x - a_1).$$

Inne etapy rozwiązania jak w przykładzie (rys. 5.4). Wyniki końcowe podaje rysunek.



Rys. 5.10. Analiza belki obciążonej siłami skupionymi



Rys. 5.11. Belka wspornikowa przy obciążeniu ciągłym

2. Wykonać wykresy M_g i T dla belki wspornikowej (rys. 5.11).

Odp. Rozwiązanie przebiega podobnie jak dla belki (rys. 5.7). Widać, że obliczenie reakcji w utwierdzonym przekroju jest tu zbędne.

3. Obliczyć wartości i wykonać wykresy M_g i T dla belki (rys. 5.12).

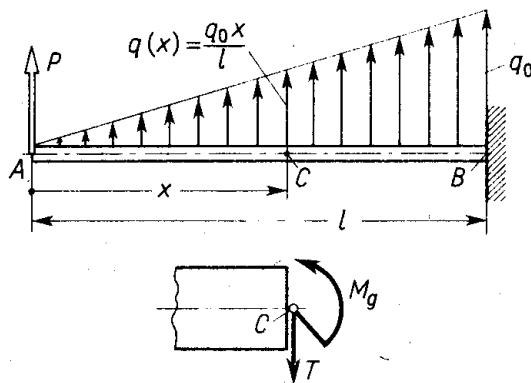
Odp. Równania równowagi dla myślowo odciętej części AC są

$$P + (q_0 x/l)(x/2) - T = 0, \quad Px + (q_0 x/l)(x/2)(x/3) - M_g = 0,$$

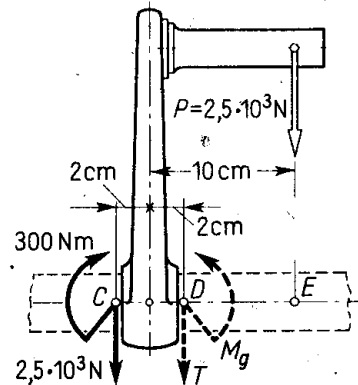
skąd

$$T = P + (q_0 x^2/2l) > 0, \quad M_g = Px + (q_0 x^3/6l) > 0.$$

W przekroju B jest $T_{ekstr} = P + (q_0 l/2)$, $(M_g)_{ekstr} = Pl + (q_0 l^2/6)$.



Rys. 5.12. Do zadania 3

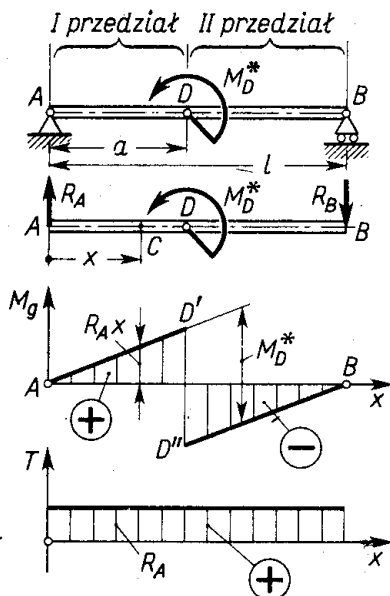


Rys. 5.13. Do zadania 4

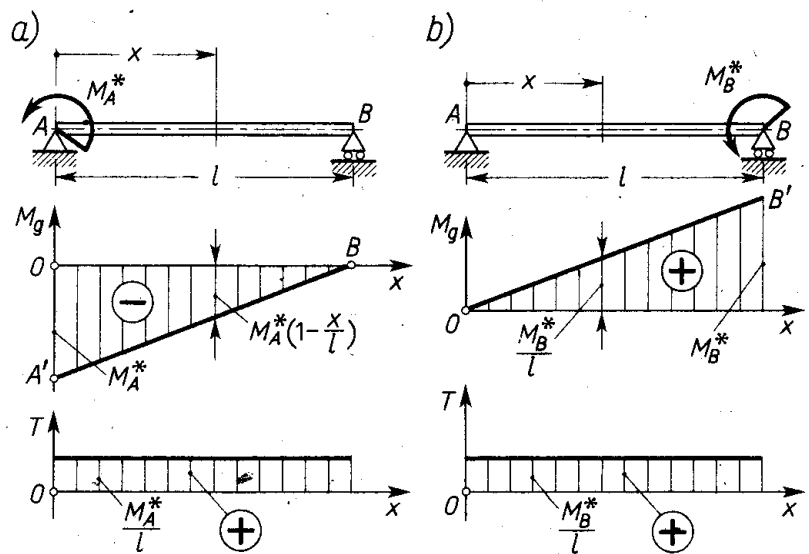
4. Wyznaczyć T i M_g w przekroju D poziomej belki z osadzoną na niej dźwignią obciążoną siłą P (rys. 5.13).

Odp. Z równań równowagi odcinka CD przy znanym wysiłku przekroju C mamy $T = -5$ kN (skierowane do góry), $M_g = 400$ N m.

5. Dla belki obciążonej skupionym momentem M_D^* (rys. 5.14) wyznaczyć wykresy T i M_g . Zbadać przypadki, gdy $a = 0$ i $a = l$.



Rys. 5.14. Wykresy M_g i T dla belki obciążonej skupionym momentem



Rys. 5.15. Dwupodporowa belka obciążona momentami na podporach

Odp. Po wyznaczeniu reakcji $R_A = R_B = M_D^*/l$ o zwrotach jak na rysunku, badamy równowagę odciętej części AC , raz, gdy $x < a$, drugi raz, gdy $x > a$. W wyniku dla $0 < x < a$ mamy $T = M_D^*/l > 0$, $M_g = M_D^* x/l > 0$; dla $a < x < l$ mamy $T = M_D^*/l > 0$, $M_g = M_D^* [(x/l) - 1] < 0$. Wykres $M_g(x)$ stanowią dwa równoległe odcinki AD' i $D''B$ z przeskokiem w przekroju D . Wykres T – linia równoległa do osi x .

Gdy $a \rightarrow 0$, wówczas obciążenie stanowi moment M_A^* (rys. 5.15a). Przedział I z rys. 5.14 znika, przedział II obejmuje całą belkę. Z pierwotnego wykresu zostaje tylko prosta $D''B$ łącząca rzędną M_A^* z punktem B . Przypadek, gdy $a \rightarrow l$, jest podobny (rys. 5.15b). W obydwóch przypadkach wykres T zostaje ten sam.

6. W zadaniu 1: a) zwiększono n razy wszystkie siły P ; b) podwojono wszystkie siły zmieniając jednocześnie ich zwroty na przeciwnie. Jak zmieniają się rzędne wykresów M_g i T ?

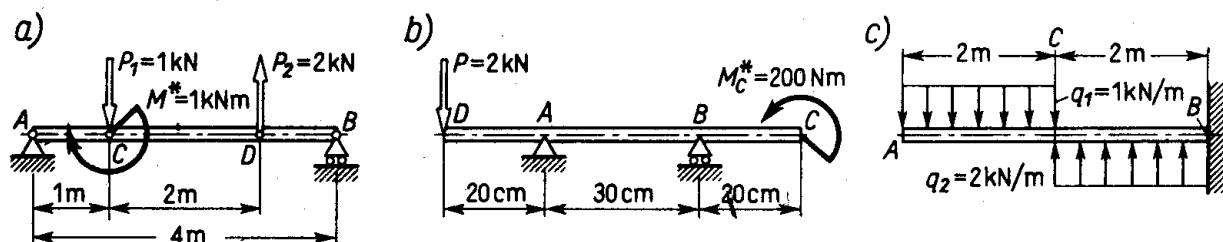
Odp. a) Wzrosną n -krotnie; b) w tym przypadku $n = -2$, a więc wzrosną dwukrotnie z jednoczesną zmianą znaku.

7. W zadaniu 1: a) zmieniono m razy wszystkie odległości, tj. l i a ; b) zmieniono odległości jak w punkcie (a) i jednocześnie zmieniono n razy siły P . Jakie są M_g i T w przekrojach A, D, E, F, B ?

Odp. a) Wartości T nie zmieniają się, M_g zmieni się m razy; b) siły T zmieniają się n razy, momenty M_g zmieniają się mn razy.

8. W zadaniu 2 i 3 dwukrotnie zwiększono l oraz odległości x badanych przekrojów. Jak zmieniają się wartości T i M_g ?

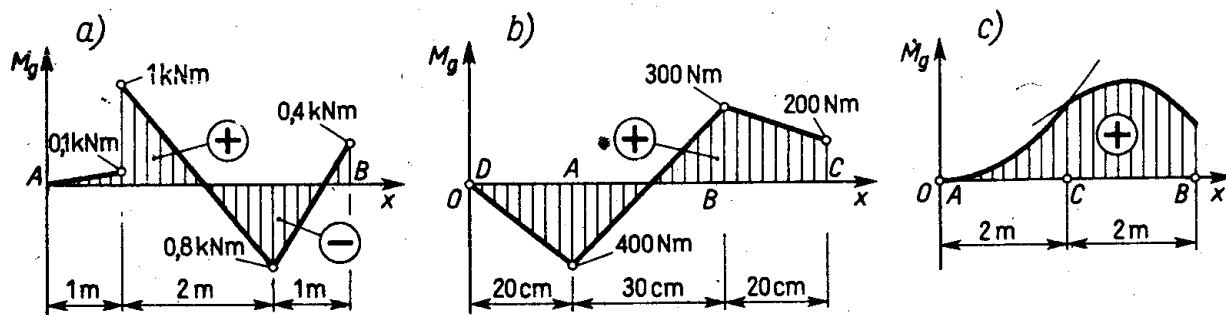
Odp. Siły T wzrosną dwukrotnie, M_g – czterokrotnie.



Rys. 5.16. Dane do zadania 9

9. Dla podanych belek (rys. 5.16) zbudować wykresy M_g i T oraz określić ich ekstremalne wartości (dodatnie i ujemne).

Odp. a) $+1\text{ kNm}$ i -1 kNm ; $+1\text{ kN}$ i -1 kN ; b) $+200\text{ Nm}$ i -400 Nm , $+2\text{ kN}$ i -2 kN ; c) -3 kNm , brak $M_g > 0$, $+2\text{ kN}$ i -2 kN .



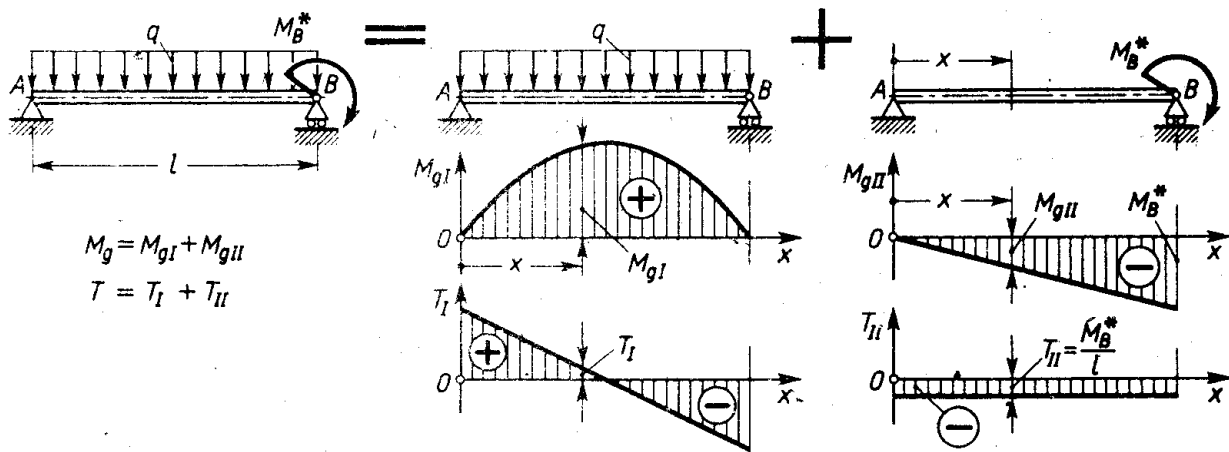
Rys. 5.17. Błędne rozwiązania zadania 9

10. Ktoś rozwiązując zadanie 9 podał wykresy M_g (rys. 5.17). Nie rachując szczegółowo wskazać oczywiste błędy na tych wykresach.

Odp. a) Pierwszy błąd: przeskok momentu jest $0,9\text{ kNm}$, a powinien być $1,0\text{ kNm}$, drugi błąd: na podporze B otrzymano $M_g \neq 0$; b) na odcinku BC jest zmienny moment, a powinien być stały, bo $T = 0$; c) pierwszy błąd w znaku momentu, drugi: w przekroju C narysowano załom, chociaż nie ma tam siły skupionej.

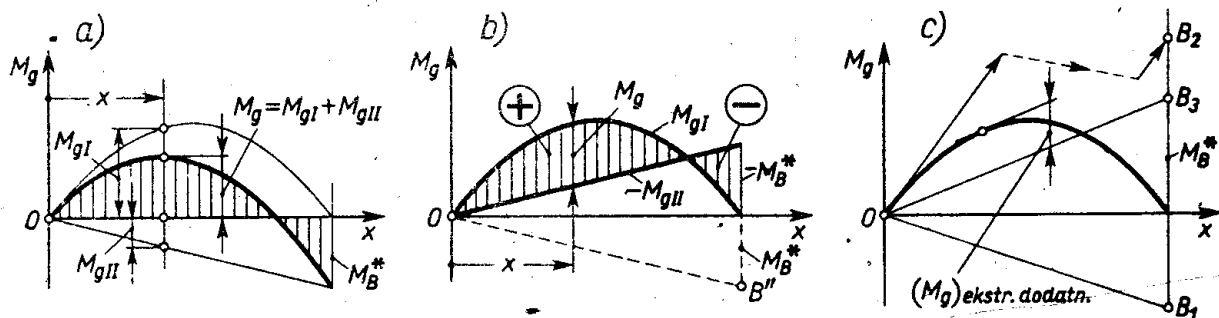
5.3. Niektóre ułatwienia obliczeń

W wielu przypadkach dla ułatwienia obliczeń stosujemy zasadę superpozycji. Weźmy dla przykładu belkę (rys. 5.18). Jej obciążenie jest superpozycją obciążenia ciągłego q oraz skupionego momentu M_B^* , dla których znamy już wykresy T i M_g (rys. 5.7 i 5.15),



Rys. 5.18. Zastosowanie zasady superpozycji do określania M_g i T

z tym że zadanemu kierunkowi M_B^* odpowiadają znaki przeciwne niż na rys. 5.15. Jedyne, co zostaje do zrobienia, to złożyć te wykresy sumując algebraicznie odpowiednie rzędne (rys. 5.19a). Prościej jednak jest na jeden wykres, tj. M_{gI} , nałożyć drugi odwrócony,



Rys. 5.19. Techniczne szczegóły superpozycji wykresów

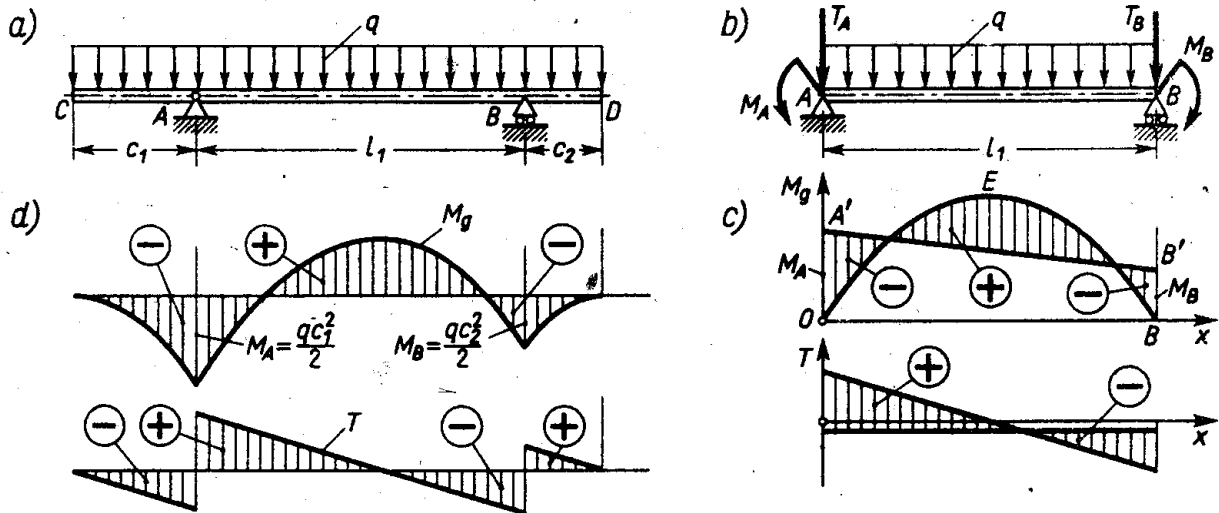
tj. M_{gII} (rys. 5.19b). Rzędna wypadkowa, tj. M_g , równa jest długości odcinka między wykresami.⁽¹⁾ Dla jasności konieczne jest zaznaczenie znaku rzędnych.

Opisany sposób jest szczególnie przydatny do badania różnych wariantów obciążenia. Tak na przykład zmianie M_B^* przy ustalonym q odpowiadają różne proste OB (rys. 5.19c). Gdy M_B^* jest dodatnie (prosta OB_1), wówczas M_g jest wszędzie dodatnie. Gdy M_B^* ma dużą ujemną wartość (prosta OB_2), wtedy wszędzie mamy $M_g < 0$. W sytuacji pośredniej (prosta OB_3) moment ten na części belki jest dodatni, na części ujemny, a jego absolutne wartości mniejsze niż w przypadkach poprzednich. Najmniejsze absolutne wartości wy-

⁽¹⁾ Gdyby moment M_B^* miał zwrot przeciwny, M_g byłby równy długości odcinka między parabolą a prostą OB'' .

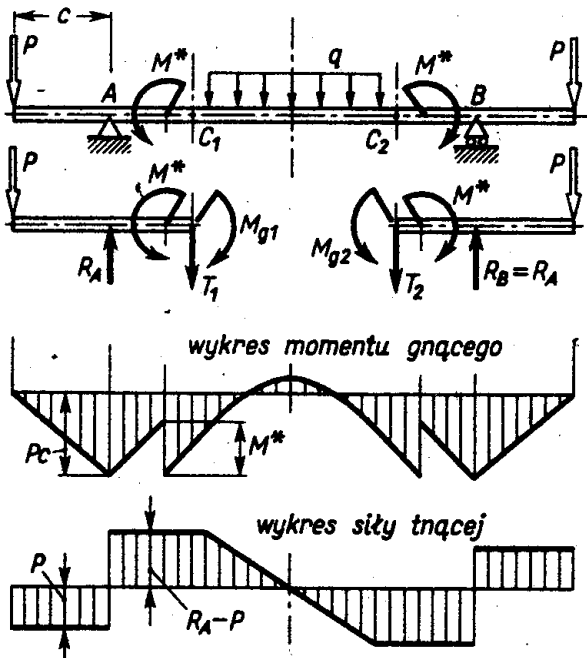
stąpią, gdy ekstremalny ujemny moment, tj. M_B^* , i ekstremalny dodatni będą równe co do bezwzględnej wartości. Postulat tego rodzaju spotyka się często w praktyce.

Inny przykład superpozycji podaje rys. 5.20a. Części CA i BD są wspornikami z rys. 5.11, dla których rolę podłoża spełnia część AB . Jeśli te wysięgniki myślowo odrzucić, to w prze-

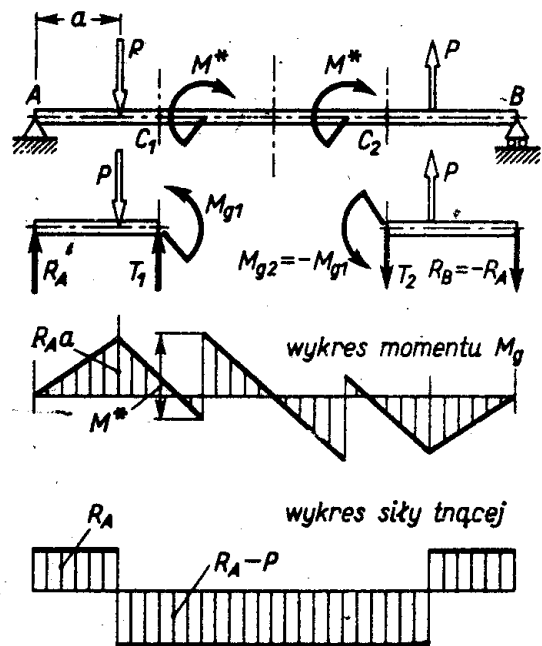


Rys. 5.20. Przykład zastosowania zasady superpozycji

kroju A części środkowej ujawni się wysiłek o składowych $T_A = qc_1$ i $M_A = qc_1^2/2$, a w przekroju B wysiłek o składowych $T_B = qc_2$ i $M_B = qc_2^2/2$. Siły T_A i T_B są zrównoważone od razu na podporach. W rezultacie na środkową część belki działają momenty M_A i M_B oraz obciążenie q (rys. 5.20b). Biorąc ze stosownymi znakami wyniki z rys. 5.7 i 5.15 mamy wykres M_g , będący nałożeniem paraboli OEB i trapezu $A'B'BO$ oraz wykres T



Rys. 5.21. Wykresy T i M_g przy obciążeniu symetrycznym



Rys. 5.22. Wykresy T i M_g przy obciążeniu antysymetrycznym

(rys. 5.20c). Dołączając do tego wykresu M_g i T dla wysięgników mamy wynik według rys. 5.20d. Podobnie jak poprzednio, tak i tu superpozycja ułatwia badanie różnych modyfikacji ustroju.

Gdy obciążenie belki jest symetryczne (rys. 5.21), wówczas w odpowiadających sobie przekrojach C_1 i C_2 działają jednakowe momenty M_g , natomiast siły tnące mają wartości przeciwne (umowa z rys. 5.5). Wynika stąd, że wykres M_g jest symetryczny, wykres T antysymetryczny. Przy obciążeniu antysymetrycznym (rys. 5.22) sytuacja jest odwrotna: wykres M_g jest antysymetryczny, wykres T symetryczny. W takich zatem przypadkach do otrzymania pełnego obrazu M_g i T wystarcza obliczenie ich dla połowy belki.

Zadania

1. Metodą superpozycji wyznaczyć wykres M_g i T w belkach z rys. 5.16a, b.
2. Zakładając w belce (rys. 5.20), że $c_1 = c_2 = c$, wyznaczyć c tak, aby absolutne wartości $(M_g)_{\text{ekstr}}$ były równe.

Odp. $c = l_1/2\sqrt{2} \approx 0,354 l_1$ i wtedy $(M_g)_{\text{ekstr}} = ql_1^2/16$.